BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2006**

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Я.Т.МЕГРАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе доказано существование и единственность классического решения одной нелокальной краевой задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка.

Для уравнения

$$u_{tt}(x,t) - \alpha u_{ttxx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) = f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T = \{(x,t): 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ рассматривается задача при обычных локальных граничных условиях

$$u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 0, u_{xx}(0,t) = 0, u_{xxx}(1,t) = 0, 0 \le t \le T\ , \qquad (2)$$

и нелокальных краевых условиях

$$\begin{aligned} &u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x), \\ &u_t(x,0) + \delta u_t(x,T) = \psi(x), 0 \le x \le 1, \end{aligned} \qquad (3)$$

где $\alpha. > 0, \delta$ -заданные числа, $\varphi(x), \psi(x), f(x,t)$ -заданные функции, а $u(x,t)$ -искомая функция, причем под классическим решением задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную в области D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющую всем условиям (1)-(3) в обычном смысле.

Теорема единственности. Если $\delta \ne \pm 1$, то задача (1)-(3) не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. Допустим, что существуют два решения рассматриваемой задачи:

$$u_1(x,t) \quad , u_2(x,t)$$

и рассмотрим разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, что удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt}(x,t) - \alpha v_{ttxx}(x,t) + v_{xxxx}(x,t) = 0 \ \ (x,t) \in D_T\,, \qquad (4)$$

и дополнительным условиям:

$$v(0,t)=0, v_x(1,t)=0, v_{xx}(0,t)=0, v_{xxx}(1,t)=0, 0\le t\le T\ , \tag{5}$$

$$v(x,0)+\delta v(x,T)=0, v_t(x,0)+\delta v_t(x,T)=0, 0\le x\le 1\,. \tag{6}$$

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Умножим обе части уравнения (4) на функцию $2v_t(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 1 :

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx-2\alpha\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx-2\int_0^1 v_{xxxx}(x,t)v_t(x,t)dx=0\,. \tag{7}$$

Пользуясь граничными условиями (5) имеем:

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx=\frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx;$$

$$2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx=2(v_{ttx}(1,t)v_t(1,t)-v_{ttx}(0,x)v_t(0,t))-$$

$$-2\int_0^1 v_{ttx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx=-\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx;$$

$$2\int_0^1 v_{xxxx}(x,t)v_t(x,t)dx=2(v_{xxx}(1,t)v_t(1,t)-v_{xxx}(0,t)v_t(0,t))-$$

$$-v_{xx}(1,t)v_{tx}(1,t)+v_{xx}(0,t)v_{tx}(0,t))+$$

$$+2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_{txx}(x,t)dx=\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx.$$

Тогда, из (7) имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx+\alpha\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx+\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx\equiv 0$$

или

$$y(t)\equiv\int_0^1 v_t^2(x,t)dx+\alpha\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx+\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx=C=const\,. \tag{8}$$

Отсюда, пользуясь условиями (6), получаем:

$$\begin{aligned}y(0)-\delta^2 y(T)&=\int_0^1 (v_t^2(x,0)-\delta^2 v^2(x,T))dx+\\&+\alpha\int_0^1 (v_{tx}^2(x,0)-\delta^2 v^2(x,T))dx+\int_0^1 (v_{xx}^2(x,0)-\delta^2 v_{xx}^2(x,T))dx=0.\end{aligned} \tag{9}$$

Из (8) и (9) имеем:

$$y(0)-\delta^2 y(T)=C(1-\delta^2)=0.$$

Так как, $\delta \neq \pm 1$, то $C=0$.

Следовательно,

$$\int_0^1 v_t^2(x,t)dx+\alpha\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx+\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx\equiv 0 .$$

Отсюда, заключаем, что

$$v_t(x,t)\equiv 0, v_{tx}(x,t)\equiv 0, v_{xx}(x,t)\equiv 0 ,$$

откуда и следует тождество

$$v(x,t)=const=C_0 .$$

Пользуясь нелокальным условиям

$$v(x,0)+\delta v(x,T)=C_0(1+\delta)=0;$$

тем самым доказано, что

$$v(x,t)\equiv 0 .$$

Следовательно, если существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, то $u_1(x,t)\equiv u_2(x,t)$. Отсюда следует, что если решение нелокальной краевой задачи (1)-(3) существует, то оно единственно. Теорема доказана.

Очевидно, что для существования классического решения задачи (1)-(3), необходимо выполнение следующих условий согласования:

$$\varphi(0)=\varphi'(1)=\varphi''(0)=\varphi'''(1)=0 ,$$

$$\psi(0)=\psi'(1)=\psi''(0)=\psi'''(1)=0 .$$

Так как система $\left\{\sin\lambda_k x, \lambda_k=-\frac{\pi}{2}(1-2k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ полна в $L_2(0,1)$, то каждое классическое решение задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x, \lambda_k=-\frac{\pi}{2}(1-2k) , \tag{10}$$

где

$$u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx .$$

Тогда, применяя формальный метод Фурье, из (1), (3) имеем:

$$(1+\alpha\lambda_k^{\ 2})u_k''(t)+\lambda_k^{\ 4}u_k(t)=f_k(t), t\in[0,T] , \tag{11}$$

$$u_k(0)+\delta v_k(T)=\varphi_k, u_k'(0)+\delta u_k'(T)=\psi_k \quad (k=1,2,...) , \tag{12}$$

где

$$f_k(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx ,$$

$$\varphi_k = 2\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\ \psi_k = 2\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x dx\ (k=1,2,...).$$

Решая задачу (11), (12) находим:

$$u_k(t) = \frac{1}{\beta_k\rho_k(T)}\{\beta_k(\cos\beta_k t + \delta\cos\beta_k(T-t))\varphi_k + (\sin\beta_k t - \delta\sin\beta_k(T-t))\psi_k -$$
$$-\frac{\delta}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^T f_k(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau) + \delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\Big\}+ \qquad (13)$$
$$+\frac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^t f_k(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau \quad (k=1,2,...),$$

где

$$\beta_k = \frac{\lambda_k^2}{\sqrt{1+\alpha\lambda_k^2}},\ \rho_k(T) = 1+\delta\cos\beta_k T + \delta^2\ (k=1,2,...).$$

Очевидно, что

$$u_k'(t) = \frac{1}{\rho_k(T)}\{\beta_k(-\sin\beta_k t + \delta\sin\beta_k(T-t))\varphi_k + (\cos\beta_k t + \delta\cos\beta_k(T-t))\psi_k -$$
$$-\frac{\delta}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^T f_k(\tau)(\cos\beta_k(T+t-\tau) + \delta\cos\ \beta_k(t-\tau))d\tau\Big\}+$$
$$+\frac{1}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^t f_k(\tau)\cos\beta_k(t-\tau)d\tau\ (k=1,2,...), \qquad (14)$$

$$u_k''(t) = \frac{1}{1+\alpha\lambda_k^2}f_k(t) - \frac{\beta_k}{\rho_k(t)}\{\beta_k(\cos\beta_k t + \delta\cos\beta_k(T-t))\psi_k +$$
$$+(\sin\beta_k t - \delta\sin\beta_k(T-t))\psi_k -$$
$$-\frac{\delta}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^T f_k(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau) + \delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\Big\}- \qquad (15)$$
$$-\frac{1}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^t f_k(\tau)(\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\ (k=1,2,...).$$

Теорема 2. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1], \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1)$ и
   $\varphi(0)=\varphi'(1)=\varphi''(0)=\varphi'''(1)=\varphi^{(4)}(0)=0$.
2. $\psi(x)\in C^3[0,1], \psi^{(4)}(x)\in L_2(0,1)$ и
   $\psi(0)=\varphi'(1)=\varphi''(0)=\varphi'''(1)=0$.

3. $f(x,t)\in C^{1,0}_{x,t}(D_T)$, $f_{xx}(x,t)\in L_2(D_T)$ и

$f(0,t)=f_x(1,t)=0\ \ \forall t\in[0,T]$.

Тогда функция

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\beta_k\rho_k(T)}\{\beta_k(\cos\beta_k t+\delta\cos\beta_k(T-t))\varphi_k+(\sin\beta_k t-\delta\sin\beta_k(T-t))\psi_k-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta}{1+\alpha\lambda_k^2}\int_0^T f_k(\tau)(\sin\beta_k(T+t-\tau)+\delta\sin\beta_k(t-\tau))d\tau\right\}+ \qquad (16)$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k(1+\alpha\lambda_k^2)}\int_0^t f_k(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin\lambda_k x$$

является классическим решением задачи (1)-(3).

Доказательство. Легко видеть, что

$$\alpha\lambda_k^2<1+\alpha\lambda_k^2<(1+\alpha)\lambda_k^2,$$

$$(1+\alpha)^{-\frac{1}{2}}\lambda_k<\beta_k<\alpha^{-\frac{1}{2}}\lambda_k,$$

$$\rho(T)\equiv\sup_k\rho_k^{-1}(T)\le 1/(1+\delta^2-|\delta|).$$

Тогда из (13-(15), соответственно, получаем:

$$|u_k(t)|\le\rho(T)(1+|\delta|)(|\varphi_k|+\sqrt{\alpha}\lambda_k^{-1}|\psi_k|)+(1+|\delta|\rho(T)(1+|\delta|))\alpha^{-\frac{1}{2}}\lambda_k^{-3}\sqrt{T}(\int_0^T|f_k(\tau)|^2d\tau),$$

$$|u_k'(t)|\le\rho(T)(1+|\delta|)(\alpha^{-\frac{1}{2}}\lambda_k|\varphi_k|+|\psi_k|)+(1+\rho(T)|\delta|(1+|\delta|))\alpha^{-1}\lambda_k^{-2}\sqrt{T}(\int_0^T|f_k(\tau)|^2d\tau)^{\frac{1}{2}},$$

$$|u_k''(t)|\le\rho(T)(1+|\delta|)(\alpha^{-1}\lambda_k^2|\varphi_k|+\alpha^{-\frac{1}{2}}\lambda_k|\psi_k|)+$$
$$+(1+\rho(T)|\delta|(1+|\delta|))\alpha^{-\frac{3}{2}}\lambda_k^{-1}\sqrt{T}(\int_0^T|f_k(\tau)|^2d\tau)+\alpha^{-\frac{1}{2}}\lambda_k^{-2}|f_k(t)|.$$

Отсюда, соответственно, имеем:

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}\le\sqrt{3}\rho(T)(1+|\delta|)(\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\sqrt{2}\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)})+ \qquad (17)$$
$$+\sqrt{3}(1+|\delta|\rho(T)(1+|\delta|)\alpha^{-1/2}\sqrt{T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}),$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4\|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2)^{1/2}\le\sqrt{3}\rho(T)(1+|\delta|)(\alpha^{-1/2}\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)})+ \qquad (18)$$
$$+(1+|\delta|\rho(T)(1+|\delta|)\alpha^{-1}\sqrt{T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}),$$

$$(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2)^{\frac{1}{2}} \le 2\rho(T)(1+|\delta|)(\alpha^{-1}\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)} + \alpha^{-\frac{1}{2}}\|\psi^{(4)}(x)\|_{L_2(0,1)}) + \tag{19}$$

$$+ 2(1+|\delta|\rho(T)(1+|\delta|)\alpha^{-\frac{3}{2}}\sqrt{T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} + 2^{-\frac{1}{2}}\|\|f_x(x,t)\|_{L_2(0,1)}\|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что

$$|u(x,t)| \le (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-10})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{20}$$

$$|u_t(x,t)| \le (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-8})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^4\|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

$$|u_{xxxx}(x,t)| \le (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k'(t)\|_{C[0,T]})^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

$$|u_{ttxx}(x,t)| \le (\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2})^{\frac{1}{2}}(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

Из (20)-(23), с учетом (17)-(19), следует, что функции $u(x,t), u_t(x,t)$, $u_{ttxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ непрерывны в D_T. Непосредственной проверкой легко видеть, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2), (3) в обычном смысле. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики, том IV, Москва, 1957.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB PSEVDOHİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN BİR QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Y.T.MEHRƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə dördüncü tərtib psevdohiperbolik tənlik üçün bir qeyri-lokal sərhəd məsələsinin klassik həllinin varlıq və yeganəliyi isbat olunmuşdur.

ON A LOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FORTH ORDER PSEUDOHYBERBOLIC EQUATION

Y.T.MEHRALIYEV

SUMMARY

In this work the existence and uniqueness of classic solution of a nonlocal boundary value problem for forth order pseudohyberbolic equation.